Pregunta **2**

Incorrecta

Puntúa 0,00 sobre 1,00

Marcar pregunta

Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ la matriz dependiente del parámetro real a definida por

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & a \\ 0 & (a-3)^2 & 1 \\ 0 & 0 & (a-5)^2 \end{bmatrix}.$$

Existe una matriz inversible $P \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tal que

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{bmatrix}$$

si, y solo si,

Seleccione una:

- a. $a \in \{1, 7\}$.
- b. $a = 4$.
- c. $a \notin \{1, 3, 4, 5, 7\}$. ✖
- d. $a \in \{3, 5\}$.

Respuesta incorrecta.

La respuesta correcta es: $a \in \{1, 7\}$.

Pregunta **3**

Correcta

Puntúa 1,00 sobre 1,00

Marcar pregunta

Sea $(\mathbb{V}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un $\mathbb{R}$ -espacio euclídeo de dimensión 3 y sea

$$G_B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

la matriz del producto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$ respecto de la base $B = \{v_1, v_2, v_3\}$. La proyección ortogonal del vector $4v_1 + v_2 + 5v_3$ sobre el subespacio $\operatorname{gen}\{v_1 + v_2, v_3\}$ es

Seleccione una:

- a. $\frac{18}{7}(v_1 + v_2) + 5v_3$.
- b. $\frac{19}{7}(v_1 + v_2) + 5v_3$. ✔
- c. $\frac{16}{7}(v_1 + v_2) + 5v_3$.
- d. $\frac{17}{7}(v_1 + v_2) + 5v_3$.

Respuesta correcta

La respuesta correcta es: $\frac{19}{7}(v_1 + v_2) + 5v_3$.

Pregunta **4**

Incorrecta

Puntúa 0,00 sobre 1,00

Marcar pregunta

Una matriz $A \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ tal que $\max_{\|x\|=1} \|Ax\| = 25\sqrt{2}$, $\min_{\|x\|=1} \|Ax\| = 20$ y $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$ puede ser

Seleccione una:

a. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$. ✖

b. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -4 & -3 \end{bmatrix}$.

c. $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$.

d. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$.

Respuesta incorrecta.

La respuesta correcta es: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -4 & -3 \end{bmatrix}$.

Pregunta **5**

Correcta

Puntúa 1,00 sobre 1,00

Marcar pregunta

Sea $Y(t)$ la solución del sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} y_1' = -y_1 + 2y_2 \\ y_2' = 2y_1 + 2y_3 \\ y_3' = 2y_2 + y_3 \end{cases}$$

tal que $Y(0) = \begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 \end{bmatrix}^T$. Vale que

Seleccione una:

a. $\lim_{t\to\infty} Y(t) = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 2 \end{bmatrix}^T$.

b. $\lim_{t\to\infty} Y(t) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}^T$. ✔

c. $\lim_{t\to\infty} Y(t) = \begin{bmatrix} -4 & -2 & 4 \end{bmatrix}^T$.

d. $\lim_{t\to\infty} Y(t) = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -4 \end{bmatrix}^T$.

Respuesta correcta

La respuesta correcta es: $\lim_{t\to\infty} Y(t) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}^T$.

Pregunta **6**

Correcta

Puntúa 1,00 sobre 1,00

Marcar pregunta

Sean

$$A = -\begin{bmatrix}2/3\\2/3\\1/3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2/3 & 2/3 & 1/3\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-1/3\\2/3\\-2/3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1/3 & 2/3 & -2/3\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-2/3\\1/3\\2/3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2/3 & 1/3 & 2/3\end{bmatrix}$$

y $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ es la forma cuadrática definida por $Q(x) = x^T A x$. Entonces $Q(x) = \|x\|^2$ si, y solo si,

Seleccione una:

a. $x \in \text{gen}\left\{\begin{bmatrix}2/3\\2/3\\1/3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1/3\\2/3\\-2/3\end{bmatrix}\right\}$.

b. $x \in \text{gen}\left\{\begin{bmatrix}-1/3\\2/3\\-2/3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-2/3\\1/3\\2/3\end{bmatrix}\right\}$. ✔

c. $x \in \text{gen}\left\{\begin{bmatrix}-1/3\\2/3\\-2/3\end{bmatrix}\right\}$.

d. $x \in \text{gen}\left\{\begin{bmatrix}2/3\\2/3\\1/3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-2/3\\1/3\\2/3\end{bmatrix}\right\}$.

Respuesta correcta

La respuesta correcta es: $x \in \text{gen}\left\{\begin{bmatrix}-1/3\\2/3\\-2/3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-2/3\\1/3\\2/3\end{bmatrix}\right\}$.

Pregunta **7**

Incorrecta

Puntúa 0,00 sobre 1,00

Marcar pregunta

Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ la matriz simétrica tal que $\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\end{bmatrix}^T \in \text{nul}(A - 2I)$, $\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\end{bmatrix}^T \in \text{nul}(A - I)$ y $\det(A) = -4$. Los puntos x_m de la superficie de ecuación $x^T A x = 4$ cuya distancia al origen es mínima son aquellos que satisfacen que

Seleccione una:

a. $x_m \in \text{gen}\left\{\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}\right\}$ y $\|x_m\|^2 = 1$.

b. $x_m \in \text{gen}\left\{\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}\right\}$ y $\|x_m\|^2 = 2$.

c. $x_m \in \text{gen}\left\{\begin{bmatrix}\frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}\right\}$ y $\|x_m\|^2 = 1$. ✖

d. $x_m \in \text{gen}\left\{\begin{bmatrix}\frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}\right\}$ y $\|x_m\|^2 = 2$.

Respuesta incorrecta.

La respuesta correcta es: $x_m \in \text{gen}\left\{\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}\right\}$ y $\|x_m\|^2 = 2$.

Pregunta **8**

Incorrecta

Puntúa 0,00 sobre 1,00

Marcar pregunta

Sean $\mathbb{S}_1$ y $\mathbb{S}_2$ los subespacios de $\mathbb{R}^3$ definidos por
$\mathbb{S}_1 = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^3 : x_3 = 0 \right\}$ y $\mathbb{S}_2 = \text{gen}\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T \right\}$ y sea
$T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal definida por:

$$T\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T\right) = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}^T,$$

$$T\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}^T\right) = \begin{bmatrix} -3 & -2 & -1 \end{bmatrix}^T,$$

$$T\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T\right) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}^T.$$

Entonces

Seleccione una:

- a. T es la proyección de $\mathbb{R}^3$ sobre $\mathbb{S}_2$ en la dirección de $\mathbb{S}_1$.
- b. T es la simetría de $\mathbb{R}^3$ con respecto $\mathbb{S}_2$ en la dirección de $\mathbb{S}_1$.
- c. T es la proyección de $\mathbb{R}^3$ sobre $\mathbb{S}_1$ en la dirección de $\mathbb{S}_2$. ✖
- d. T es la simetría de $\mathbb{R}^3$ con respecto $\mathbb{S}_1$ en la dirección de $\mathbb{S}_2$.

Respuesta incorrecta.

La respuesta correcta es: T es la simetría de $\mathbb{R}^3$ con respecto $\mathbb{S}_2$ en la dirección de $\mathbb{S}_1$.

Pregunta **9**

Incorrecta

Puntúa 0,00 sobre 1,00

Marcar pregunta

La seudoinversa de Moore - Penrose de la matriz

$$\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

es

Seleccione una:

- a. $\frac{1}{900}\begin{bmatrix} 19 & -8 \\ 14 & 2 \\ -10 & 20 \end{bmatrix}$.
- b. $\frac{1}{1800}\begin{bmatrix} 19 & -8 \\ 14 & 2 \\ -10 & 20 \end{bmatrix}$.
- c. $\frac{1}{450}\begin{bmatrix} 19 & -8 \\ 14 & 2 \\ -10 & 20 \end{bmatrix}$. ✖
- d. $\frac{1}{1350}\begin{bmatrix} 19 & -8 \\ 14 & 2 \\ -10 & 20 \end{bmatrix}$.

Respuesta incorrecta.

La respuesta correcta es: $\frac{1}{900}\begin{bmatrix} 19 & -8 \\ 14 & 2 \\ -10 & 20 \end{bmatrix}$.

Pregunta **10**

Correcta

Puntúa 1,00 sobre 1,00

Marcar pregunta

Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Si $|a| < 1$, entonces

Seleccione una:

- a. todas las soluciones no nulas del sistema $Y' = AY$ satisfacen que $\lim_{t\to+\infty} \|Y(t)\| = 0$.
- b. algunas soluciones no nulas del sistema $Y' = AY$ satisfacen que $\lim_{t\to+\infty} \|Y(t)\| = 0$ y otras satisfacen que $Y(t) = Y(0)$ para todo $t \in \mathbb{R}$.
- c. algunas soluciones no nulas del sistema $Y' = AY$ satisfacen que $\lim_{t\to+\infty} \|Y(t)\| = 0$ y otras satisfacen que $\lim_{t\to+\infty} \|Y(t)\| = +\infty$.
- d. todas las soluciones no nulas del sistema $Y' = AY$ satisfacen que $\lim_{t\to+\infty} \|Y(t)\| = +\infty$. ✔

Respuesta correcta

La respuesta correcta es: todas las soluciones no nulas del sistema $Y' = AY$ satisfacen que $\lim_{t\to+\infty} \|Y(t)\| = +\infty$.

① $A \in \mathbb{R}^{3\times3}$

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & a \\ 0 & (a-3)^2 & 1 \\ 0 & 0 & (a-5)^2 \end{bmatrix} \quad \exists \; P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{bmatrix}$$

[redacted]

Pero en realidad, como A ~~diagonal~~, tiene $D = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{bmatrix}$

$\cancel{(a-3)^2 = 16}$ $\quad$ $\cancel{(a-5)^2 = 4}$

$(a-3)^2 = 4 \qquad (a-3)^2 = 16 \qquad (a-\cancel{3}^{\,5})^2 = 16 \qquad (a-5)^2 = 4$

$a = 1 \qquad \cancel{a=5} \qquad a = 9 \qquad a = 3$

$a = 5 \qquad \cancel{a=1} \;\; a = 7 \qquad a = 1 \qquad a = 7$

$a = -1$

$\Big\} \; \boxed{a \in \{1, 7\}}$

Foto

Ejercicio 3

$\max_{\|x\|=1} \|Ax\| = 36 \quad \min \|Ax\| = 4 \quad A \in \mathbb{R}^{3\times 2}$

y $[2 \ 1 \ -2] A = (0;0)$

transpongo

$[2 \ 1 \ -2]^T A^T = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad Nul(A^T) = (col(A))^\perp$

$A^T \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad Nul(A) = Nul(A^T A)$

$Rg(A) = 2$

$A = U \cdot \Sigma \cdot V^T$

$$A = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & 0 & 2/3 \\ -2/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} & 1/3 \\ 0 & 1/\sqrt{5} & -2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 36 & 0 \\ 0 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^T.$$

$\in col(A)$ $\quad \in col(A)^\perp$

saco col(A)

$(2 \ 1 \ -2)(x_1; x_2; x_3) = 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 0$

entonces: $x_2 = 2x_3 - 2x_1$

$(x_1; 2x_3 - 2x_1; x_3)$

$x_1(1; -2; 0) + x_3(0; 2; 1)$

$col(A) = \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{5}}; \frac{-2}{\sqrt{5}}; 0\right); \left(0; \frac{2}{\sqrt{5}}; \frac{1}{\sqrt{5}}\right) \right\}$

V: base de $\mathbb{R}^2$ cualquier base sirve por lo que pueden ser infinitas matrices

$$V = Proy_S(V) + Proy_{S^\perp}(V)$$

$$(4 \quad 1 \quad 5) - \left(\tfrac{9}{7} \quad -\tfrac{12}{7} \quad 0\right) = Proy_{S^\perp}(V)$$

$$\left(\tfrac{19}{7} \quad \tfrac{19}{7} \quad 5\right) = proy_S(V)$$

$$\therefore Proy_S(V) = \frac{19}{7} v_1 + \frac{19}{7} v_2 + 5 v_3$$

Ejercicio 9

$[1 \; 0 \; 1] \; A = [0 \; 0] \qquad A \in \mathbb{R}^{3\times 2}$

$\max\limits_{\|x\|=1} \|Ax\| = 25\sqrt{2} \qquad \min\limits_{\|x\|=1} \|Ax\| = 20$

transpongo: A^T

$A^T (1 \; 0 \; 1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad Nul(A^T) = (Col(A))^{\perp}$

$A = U \cdot \Sigma \cdot V^T$

saco col (A)

$(1 \; 0 \; 1)(x_1 \; x_2 \; x_3) = x_1 + x_3 = 0$

$\rightarrow x_1 = -x_3 \qquad (-x_3 ; x_2 ; x_3)$

$\therefore x_3(-1; 0; 1) + x_2(0; 1; 0)$

$\rightarrow col(A) = \left\{ \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right); (0; 1; 0) \right\}$

entonces $\lambda_{max} = 25\sqrt{2} \qquad \lambda_{min} = 20$

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{U} \underbrace{\begin{pmatrix} 25\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 20 \end{pmatrix}}_{\Sigma} \underbrace{\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}}_{V^T}$$

4

$y(t)$

$$\begin{cases} y_1' = -y_1 + 2y_2 \\ y_2' = 2y_1 + 2y_3 \\ y_3' = 2y_2 + y_3 \end{cases}$$

$$y(0) = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Tenemos entonces que $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$

$$y'(t) = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} y(t)$$

Denominamos: $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Veamos si A es diagonalizable, es decir, si $\exists\ P \in \mathbb{R}^{2\times 2}$

tal que $A = PDP^{-1}$

Analizamos A:

$$\det \begin{pmatrix} \lambda+1 & -2 & 0 \\ -2 & \lambda & -2 \\ 0 & -2 & \lambda-1 \end{pmatrix} = \lambda+1 \begin{vmatrix} \lambda & -2 \\ -2 & \lambda-1 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 0 & \lambda-1 \end{vmatrix} =$$

$$= (\lambda+1)(\lambda^2-\lambda-4) + 2(-2\lambda+2) = \lambda^3 - \cancel{\lambda^2} - 4\lambda + \cancel{\lambda^2} - \lambda - 4 + -4\lambda + 4 =$$

$$= \lambda^3 - 9\lambda = 0$$

$$\lambda(\lambda^2-9) = 0 \rightsquigarrow \begin{array}{l} \underline{\lambda_1 = 3} \\ \underline{\lambda_2 = -3} \\ \underline{\lambda_3 = 0} \end{array}$$

Ya sabemos que es diagonalizable ya que a autovalores $\neq$ le corresponden autovectores LI, los buscamos:

$\lambda_1 = 3$

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \sim 2x_1 = x_2 \\ \\ \sim x_2 = x_3 \end{matrix} \qquad S\lambda_1 = \text{gen}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

$\lambda_2 = -3$

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & -3 & -2 \\ 0 & -2 & -4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \sim x_1 = -x_2 \\ \\ \sim x_2 = -2x_3 \end{matrix} \qquad S\lambda_2 = \text{gen}\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$\lambda_3 = 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \sim x_1 = 2x_2 \\ \\ \sim x_3 = -2x_2 \end{matrix} \qquad S\lambda_3 = \text{gen}\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$$

Entonces tenemos que A es diagonalizable con:

$$P = \begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & -2/3 & 1/3 \\ 2/3 & 1/3 & -2/3 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Veamos entonces que las soluciones serán

$$y(t) = c_1 e^{3t}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 e^{-3t}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 e^{-0t}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$y(t) = c_1 e^{3t}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 e^{-3t}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

si $y(0) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} C_1 + 2C_2 + 2C_3 = 4 & (1) \\ 2C_1 - 2C_2 + C_3 = -1 & (2) \\ 2C_1 + C_2 - 2C_3 = -1 & (3) \end{cases}$$

de (2) $\quad C_3 = 2C_2 - 2C_1 - 1$

en (1) $\quad C_1 + 2C_2 + 4C_2 - 4C_1 - \overset{2}{\cancel{4}} = 4$

$$-3C_1 + 6C_2 = \cancel{8}\,6$$

$$6C_2 = 6\cancel{8} + 3C_1$$

$$C_2 = 1 + \frac{1}{2} C_1 \longrightarrow \underline{\underline{C_2 = 1}}$$

$$C_3 = 2 + C_1 - 2C_1 - 1$$

$$C_3 = 1 - C_1 \longrightarrow \underline{\underline{C_3 = 1}}$$

en (3) $\quad \cancel{2C_1 + \frac{4}{3} + \frac{C_1}{2} - \frac{10}{3} - 2C_1 = -1}$

$$2C_1 + 1 + \frac{1}{2} C_1 - 2 - 2C_1 = -1$$

$$\frac{1}{2} C_1 - \cancel{1} = -1$$

$$\underline{\underline{C_1 = 0}}$$

$$\longrightarrow \underline{\underline{y(t) = e^{-3t} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}}}$$

$$\boxed{\lim_{t \to +\infty} y(t) = (2 \quad 1 \quad -2)^T}$$

Ejercicio 7

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$\lambda = 2 \rightarrow S_{\lambda=2} = (1\ 0\ 1)^T$

$\lambda = 1 \rightarrow S_{\lambda=1} = (0, 1, 0)^T$

$\det(A) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 = -4$

$(1)(2)(-2) = -4 \rightarrow \lambda_3 = -2$

$x^T A x = 4$

primero hay que hallar la matriz:

$A = P \cdot D \cdot P^{-1}$

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad u \times v = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \boxed{x^T A x = 4}$$

Teorema de Rayleigh

$$\lambda_{min} \leq \frac{x^T A x}{\|x\|^2} \leq \lambda_{max}$$

tengo $x^T A x = 4$

poniendo

$y = P^{-1} x$ se puede observar que

$$x^T A x = 4 \sim y^T \cdot D \cdot y = 4$$

tengo $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $a_{11} = 0$

forma cuadratica:

$$g(x,y,z) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz$$

$$g(x,y,z) = 0 + y^2 + 0 + 0 + 4xz$$

$$g(x,y,z) = y^2 + 4xz$$

$$g(x,y,z) = y^2 + 4xz$$

$$-2 = y^2 + 4xz \qquad \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \quad 0 \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

se cumple

$Q(x) = x^T A x$

$$\lambda_m \|x\|^2 \leq Q(x) \leq \lambda_M \|x\|^2$$

uso la segunda desigualdad

$$\|x\|^2 \geq \frac{Q(x)}{\lambda_m} \rightarrow \|x\|^2 \geq \frac{4}{2} = 2$$

Ejercicio 9

$A = U \Sigma V^T$

$$\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$A^+ = (A^T \cdot A)^{-1} \cdot A^T \rightarrow$ matriz pseudo inversa

4 y 2 son los AVas de la matriz

$A^+ = V \cdot \Sigma^+ \cdot U^T$

normalizo columnas U

$\sqrt{3^2+4^2} = 5$

normalizo columnas V^+

$\sqrt{1^2+2^2+2^2} = 3$

Aca queda:

$$5 \cdot 3 \begin{bmatrix} 3/5 & -4/5 \\ 4/5 & 3/5 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 2/3 \\ -2/3 & -1/3 & 2/3 \\ 2/3 & -2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

saco la reducida

$$5 \cdot 3 \underset{U^0}{\begin{pmatrix} 3/5 & -4/5 \\ 4/5 & 3/5 \end{pmatrix}} \underset{D}{\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}} \underset{V_1^+}{\begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 2/3 \\ -2/3 & -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}}$$

entonces:

$$A^+ = \begin{bmatrix} 1/3 & -2/3 \\ 2/3 & -1/3 \\ 2/3 & 2/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/4 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3/5 & 4/5 \\ -4/5 & 3/5 \end{bmatrix}$$

$$A^+ = \begin{pmatrix} 19/60 & -2/15 \\ 7/30 & 1/30 \\ -1/6 & 1/3 \end{pmatrix} = \frac{1}{(15)(60)} \begin{pmatrix} 19 & -80 \\ 14 & 2 \\ -10 & 20 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{A^+ = \frac{1}{900} \begin{pmatrix} 19 & -8 \\ 14 & 2 \\ -10 & 20 \end{pmatrix}}$$

10) $A = \begin{bmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, si $|a|<1$, entonces:

$-1 < a < 1$ $\qquad\qquad$ $1-\lambda = a \ \vee \ 1-\lambda = -a$

$(1-\lambda)^2 - a^2 = 0$ $\qquad\qquad$ $1-a = \lambda \qquad 1+a = \lambda$

$(1-\lambda) = a$

$\lambda = 1-a$

$Y' = D \cdot Y$ $\qquad \Rightarrow \qquad \begin{pmatrix} 1-a & 0 \\ 0 & 1-a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{matrix} x_1' \\ x_2' \end{matrix}$

$x_1' - x_1(1-a) = 0$ $\qquad\qquad$ $\Rightarrow x_1 = c_1 e^{1-a}$

$\Rightarrow x_2 = c_2 e^{1+a}$

$\lim\limits_{t \to \infty} \ v_1 . c_1 \, e^{1-a} + v_2 \, c_2 \, e^{4a}$

todas las soluciones no nulos del sistema $Y' = AY$ satisfacen que $\lim\limits_{t \to +\infty} \|Y(t)\| = +\infty$